LE GEOMETRIE NON EUCLIDEE

RICERCA DI LOUBNA ZAKARI 1°C GEOMETRI

Le Geometrie non euclidee sono le moderne teorie che **non riconoscono valido il V postulato di Euclide**, secondo cui **per un punto non appartenente ad una retta passa una sola retta parallela alla retta data**.

Secondo la **geometria iperbolica** **esistono infinite rette parallele** ad una retta data passanti per un punto.

Secondo la **geometria ellittica** **non esistono rette parallele** a una retta data passanti per un punto.

sono intuitivi né verificabili empiricamente, come avveniva, invece, per i postulati di Euclide, facendo ricorso a semplici costruzioni con riga e compasso.

La discussione sul quinto postulato

Dopo circa 2000 anni si riuscì a stabilire che l'assioma di unicità della parallela era indipendente dagli altri assiomi della geometria euclidea ma per arrivare a questa certezza furono coinvolti molti matematici tra i quali per primo **Euclide (III se. a.C.)** che ebbe dei dubbi riguardo al "quinto postulato", infatti egli cercò di rimandare il più possibile il suo utilizzo, anche a costo di dimostrazioni più complicate.

Dopo Euclide, molti studiosi cercarono di dimostrare se il quinto postulato fosse deducibile dagli assiomi e dai teoremi precedenti. Tuttavia tutti i tentativi fallirono per lo stesso, identico errore logico: le proprietà di volta in volta usate per dimostrare il postulato erano identiche al postulato stesso. **Girolamo Saccheri (1667-1793)**, tentò una dimostrazione per assurdo: egli si dedicò allo sviluppo di una "geometria" priva dell'assioma della parallela, nella speranza di trovare una contraddizione che però non, fu trovata.

Le ricerche iniziate da Saccheri furono poi sviluppate più approfonditamente dall'ungherese **Janos Bolyai (1802-1860)** (a sin.) e dal russo **Nicolaj Lobaceviskij (1793- 1856)** (a destra) i quali assunsero che per un punto si potesse condurre più di una parallela a una retta data. Essi si resero conto che ciò conduceva ad una geometria "molto strana" : in una tale geometria, per esempio, la somma dei angoli interni di un triangolo è minore di 180° !

Sebbene questa geometria (iperbolica) fosse strana non mostrava comunque, alcuna contraddizione.

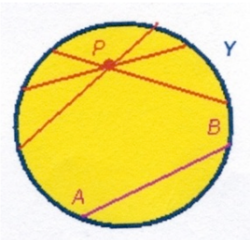
Ovviamente il fatto che Saccheri, Lobocevskij e Bolyai non abbiano trovato contraddizioni non prova il fatto che non ci fossero. In linea di principio la contraddizione poteva esserci, anche se fino a quel momento non era stata ancora trovata.

Il problema fu definitivamente superato grazie ai modelli di geometria iperbolica ed ellittica che, cambiando i concetti primitivi di "retta", "punto" e "piano", dimostrano che esistono dei sottoinsiemi del piano euclideo in cui sono soddisfatti tutti gli assiomi della geometria euclidea eccetto quello dell'unicità della parallela.

Il modello di Klein

__Felix Klein (1849-1925)__ ha elaborato un modello di __geometria iperbolica__ nella quale i concetti primitivi di piano, punto e retta, sono riletti nel modo seguente:

- **si chiama "piano" l'insieme dei punti interni ad una circonferenza y;**
- **si chiama "punto" un qualunque punto interno a**
- **si chiama "retta" una qualunque corda della circonferenza, esclusi gli estremi.**



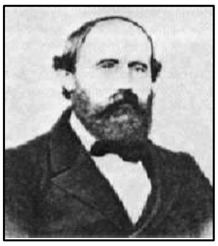
Le corde in rosso passanti per il punto P sono, nel punto di Klein, rette per P parallele alla retta AB. La corda AB è una "retta" nel modello di Klein.

Nel "piano" di Klein, in cui i "punti" e le "rette" sono gli enti così definiti, non vale l'assioma della parallela, perché, dato un punto P e una retta AB, <u>ci sono infinite rette che non intersecano AB</u>. Tuttavia si potrebbe dimostrare che, ridefinendo opportunamente il concetto di congruenza, valgono tutti gli assiomi della geometria euclideo.

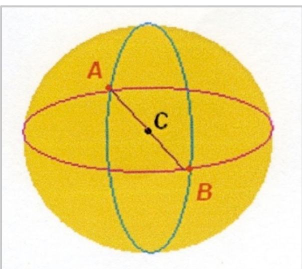
Il modello di Klein prova definitivamente che l'assioma dell'unicità della parallela è indipendente dai precedenti assiomi: assumendolo si ottiene la geometria euclidea classica, in cui la somma degli angoli interni di un triangolo è 180°; sostituendolo si ottengono le geometrie non euclidee tra cui la geometria iperbolica.

Il modello di Riemann

Un'altro esempio di geometria non euclidea, è il modello di __geometria ellittica__ trovata dal tedesco __Bernard Riemann (1826-866)__ che si **ottiene considerando una sfera e operando la seguente rilettura dei concetti "punto", "retta" e "piano" :**



- **si chiama "piano" l'insieme dei punti della superficie sferica;**
- **si chiama "punto" una coppia di punti diametramente opposti;**
- **si chiama "retta" ogni circonferenza massima della sfera.**



Nella geometria ellittica due qualsiasi "rette" s'incontrano in un "punto, quindi le parallele non esistono più. Continuano tuttavia a sussistere molti degli assiomi della geometria euclidea, ma non tutti, infatti nella geometria euclidea si può dedurre l'esistenza di almeno una parallela, quindi, non esistendo nella geometria ellittica alcuna parallela , almeno un altro assioma non dev'essere più valido. Due circonferenze massime s'incontrano in due punti, A e B, diametralmente opposti rispetto al centro C della sfera.